

INTRODUZIONE ALLO STUDIO DELLA MATEMATICA E DELLE DISCIPLINE SCIENTIFICHE

Il percorso liceale è chiamato a offrire agli studenti strumenti per comprendere come la scienza e la tecnica informano la nostra rappresentazione del mondo e il modo in cui lo abitiamo, nonché a fornire le basi per gli studi universitari. Lo studio della matematica, dell'informatica e delle discipline scientifiche è dunque una componente essenziale della formazione liceale sia al fine di acquisire fondamenti di saperi specialistici, sia in quanto percorso unitario di educazione al metodo scientifico e al pensiero razionale. Attraverso questo lavoro, che necessariamente richiede il coinvolgimento attivo degli studenti in attività strutturate e in situazioni dove si devono porre e affrontare problemi, gli studenti costruiscono concetti e significati, linguaggi e teorie, competenze e atteggiamenti, che sono propri di ciascuna disciplina, ma sono intrecciati trasversalmente e dialogano fecondamente tra di loro. Apprendono un modo di interrogare la realtà: osservare ed esplorare i fenomeni, individuare regolarità, formulare ipotesi, costruire modelli, mettere alla prova la loro validità tramite esperimenti mirati – discutendo, argomentando e imparando a riconoscere l'errore come un'occasione di crescita.

In tale quadro, la matematica si trova in una posizione particolare e centrale, come creazione autonoma del pensiero e allo stesso tempo come linguaggio unificante di tutte le scienze e tecniche, strumento per rappresentare relazioni, costruire modelli, calcolare, dimostrare. Attraverso la matematica lo studente sviluppa la creatività e impara a riconoscere e rispettare la coerenza logica dei discorsi e delle dimostrazioni. Al tempo stesso, la costruzione dei suoi concetti, significati, procedure, in tutto il percorso liceale, si alimenta delle loro interpretazioni in situazioni e contesti di tutti gli ambiti della vita quotidiana e del sapere, in particolare delle scienze e della fisica, e in tutto l'arco del secondo biennio e del quinto anno si sviluppa anche grazie a uno stretto collegamento con la modellizzazione.

La fisica descrive la Natura integrando osservazione e astrazione. In quest'ottica, l'introduzione in matematica delle funzioni fin dal primo biennio, poi dei concetti intuitivi di derivata e integrale, possibile già dall'inizio del secondo biennio, e infine al quinto anno degli elementi dell'Analisi matematica consente di formalizzare le leggi fisiche con rigore. Tale strumentazione è indispensabile per definire operativamente le grandezze e costruire modelli coerenti; essa permette di analizzarne i limiti di validità e di progettare esperimenti per testare le teorie, promuovendo il progresso tecnologico.

Le scienze naturali integrano osservazione, sperimentazione e riflessione critica, realizzate con gli strumenti metodologici propri delle discipline che le compongono (biologia, chimica e scienze della Terra), e offrono strumenti per comprendere le interrelazioni tra la struttura della materia, le funzioni cellulari, le caratteristiche e il ruolo degli organismi, la composizione degli ecosistemi, i processi profondi e superficiali della Terra; in tal modo contribuiscono a promuovere una comprensione sistemica dei fenomeni e un orientamento responsabile rispetto alle questioni della sostenibilità.

L'informatica mette a disposizione strumenti formali e operativi per la rappresentazione e l'elaborazione delle informazioni, costruendo sistemi, linguaggi e algoritmi, dei quali analizza l'efficienza e l'intrinseca affidabilità, nonché l'impatto sugli utenti, individui e organizzazioni.

Tutto ciò va collocato in una prospettiva storica e interdisciplinare, che consenta di riflettere, ad esempio, sul rapporto tra matematica e fisica nella nascita del Calcolo, sul progressivo evolversi della matematizzazione e, poi, della digitalizzazione della natura, e che metta in evidenza le molteplici influenze che, in vari momenti storici come nel tempo presente, le diverse scienze hanno esercitato e continuano a esercitare le une sulle altre. In questa prospettiva si colloca anche il confronto con l'intelligenza artificiale, che sempre più, nei suoi vari aspetti, è oggetto e strumento di ricerca e di apprendimento delle scienze, della fisica, della matematica e dell'informatica – da questo confronto critico, in dialogo con le scienze umane, vengono stimolati l'uso consapevole dell'intelligenza artificiale, la comprensione delle sue implicazioni sociali ed etiche, nonché la riflessione filosofica.

Quindi è importante che le istituzioni scolastiche e i docenti delle diverse discipline promuovano opportune forme di coordinamento per quanto riguarda gli obiettivi e la progressione degli argomenti nei rispettivi percorsi didattici. Ed è anche importante cogliere e ricercare occasioni per aprire lo sguardo e gli interessi degli studenti sulle tecnologie e sulle ingegnerie – partendo dai legami che queste hanno, anche trasversalmente, con le diverse discipline scientifiche, e sfruttando opportune interazioni con università, enti di ricerca e imprese sui territori.

MATEMATICA

PERCHÉ STUDIARE LA MATEMATICA

Lo sviluppo di conoscenze e competenze matematiche è centrale per la formazione personale e culturale dell'individuo ed è essenziale per esercitare una cittadinanza attiva e responsabile; inoltre, fornisce basi importanti per il lavoro e le professioni. Infatti, attraverso l'apprendimento della Matematica si sviluppano il ragionamento logico, la curiosità e la creatività, la capacità di analizzare dati e informazioni, di esprimere con chiarezza il proprio punto di vista e di confrontarsi con le idee degli altri. Con la Matematica si educa al valore della bellezza e dell'armonia, si sviluppa la capacità di affrontare l'incertezza e di orientarsi, con metodo, nelle scelte personali e professionali. Si acquisiscono inoltre strumenti concettuali e operativi per descrivere i fenomeni naturali e i dispositivi artificiali, per creare modelli, per calcolare e formulare previsioni. Tali strumenti sono alla base delle discipline scientifiche e della tecnica e contribuiscono al progresso sociale, culturale, civile ed economico. Inoltre, l'apprendimento della matematica fornisce concetti e linguaggio che stanno alla base dei sistemi di intelligenza artificiale e favorisce un loro uso consapevole da parte dello studente, contribuendo a sviluppare la comprensione del loro funzionamento e la capacità di valutarne l'affidabilità e le implicazioni; si promuove così un atteggiamento critico e responsabile nei confronti di tali sistemi e strumenti.

LINEE GENERALI E COMPETENZE

L'insegnamento della matematica nel Liceo riconosce e valorizza il ruolo della matematica come linguaggio per descrivere e interpretare la realtà; al contempo, evidenzia il carattere logicamente coerente e sistematico della matematica, nonché la sua intrinseca bellezza ed eleganza. Inoltre, offre occasioni per stabilire collegamenti interdisciplinari e per comprendere come il pensiero matematico è nato e si è sviluppato storicamente in relazione con gli altri ambiti del pensiero.

Nel Liceo, lo studente costruisce gradualmente una comprensione della Matematica come sistema teorico, costituito da concetti e proposizioni che hanno significato e sono collegati tra loro da idee generali, procedimenti e dimostrazioni, in un orizzonte di senso personale e collettivo. Questa costruzione riguarda tutti i nuclei tematici e si realizza attraverso il coinvolgimento attivo degli studenti in situazioni problematiche e in attività strutturate, dove vengono valorizzati i processi di esplorazione, formulazione di ipotesi e argomentazione, e si sviluppano i significati degli oggetti matematici insieme alle competenze, agli atteggiamenti e ai valori.

L'insegnamento della Matematica offre infine agli studenti uno spazio di inclusione e di crescita personale, dove l'errore non viene considerato un fallimento, bensì un'opportunità di apprendimento e di confronto; dove si può imparare a superare le difficoltà, acquisire fiducia nelle proprie capacità, assumere la responsabilità del proprio apprendimento.

In questo contesto, in continuità con le Nuove Indicazioni Nazionali per il primo ciclo, l'apprendimento dell'informatica offre agli studenti un ulteriore strumento formale per descrivere, modellizzare e interpretare la realtà, che risulta indispensabile per comprendere i contesti in cui l'elaborazione automatica delle informazioni svolge un ruolo determinante.

Al termine del percorso del liceo Scientifico lo studente sarà in grado di:

- riconoscere e valorizzare la duplice natura della matematica: strumentale e culturale;
- riconoscere e apprezzare l'insieme dei valori che caratterizzano la matematica nella sua dimensione culturale e storica;
- rappresentare oggetti matematici e relazioni fra essi, operare con queste rappresentazioni e passare dall'una all'altra ove opportuno;
- comunicare in e con la matematica utilizzando linguaggi e notazioni appropriate;
- porre e affrontare problemi anche in contesti non matematici;
- applicare i modelli matematici studiati alla descrizione dei fenomeni del mondo reale, con particolare attenzione a quelli di carattere fisico;
- leggere criticamente dati quantitativi e grafici;
- argomentare, utilizzando le conoscenze possedute, in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere, vagliandone la plausibilità, discutendo idee e confrontando punti di vista, anche nella prospettiva dell'educazione civica;

- costruire dimostrazioni, individuando e rendendo espliciti gli assunti, concatenando in modo rigoroso i passaggi logici e giungendo a conclusioni coerenti e fondate;
- comprendere e applicare principi e concetti fondamentali dell'informatica per analizzare e modellare fenomeni e problemi;
- valutare criticamente l'opportunità di utilizzare le tecnologie digitali, riconoscendone potenzialità e limiti, e di adottarle in modo consapevole, responsabile, competente e creativo;
- interagire in modo critico e consapevole con sistemi di intelligenza artificiale e utilizzarli responsabilmente per analizzare informazioni ed esplorare problemi comprendendo le loro potenzialità e i limiti, nonché le implicazioni etiche e le assunzioni di responsabilità personale connesse al loro utilizzo;
- fare collegamenti inter e pluridisciplinari, analizzare tappe significative dello sviluppo del pensiero matematico in relazione al contesto storico e culturale;
- riconoscere alcune connessioni tra matematica, filosofia e pensiero scientifico nella loro evoluzione storica essendo consapevole del ruolo della matematica nei diversi ambiti dell'attività umana.

Le competenze indicate costituiscono un bagaglio di strumenti che permette allo studente di analizzare razionalmente le situazioni, avere coscienza delle proprie risorse e prendere decisioni consapevoli e motivate, anche in ambito personale e formativo.

Per dare evidenza alla stretta connessione fra l'apprendimento della teoria e lo sviluppo delle competenze, ciascuno degli obiettivi specifici che seguono viene formulato come un'azione che lo studente è in grado di compiere operando su e con oggetti e procedure matematiche, sostenuto da intenzioni, strategie e competenze disciplinari e trasversali.

OBIETTIVI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO E CONOSCENZE

PRIMO BIENNIO

Per garantire continuità e orientare lo sviluppo del curriculum, nel primo biennio sono stati mantenuti i nuclei tematici del primo ciclo, rinominati ove opportuno per evidenziare il passaggio dall'esplorazione dei campi di esperienza alla costruzione di teorie. Così, dal nucleo "Numeri" si passa ad "Aritmetica e Algebra" e da "Spazio e figure" a "Geometria"; "Dati e previsioni" diventa "Analisi di dati, Statistica e Probabilità". Il nucleo "Funzioni" indica l'esplorazione delle rappresentazioni grafiche e delle proprietà di diversi tipi di funzioni di una variabile reale, che sono utili anche per altre materie. Il nucleo "Informatica" prosegue lo sviluppo delle tematiche disciplinari introdotte nel primo ciclo. Infine, il nucleo trasversale "Linguaggio degli insiemi e delle funzioni, logica e linguaggio" evidenzia gli obiettivi di consapevolezza della struttura logica e linguistica del pensiero matematico. Tali obiettivi, pur rivestendo un carattere fondamentale, sono collocati per ultimi, a sottolineare che il loro raggiungimento è possibile solo in modo graduale e in stretta connessione con il lavoro svolto negli altri nuclei.

ARITMETICA E ALGEBRA

Alla fine del primo biennio, in diversi contesti, interni alla matematica o appartenenti ad altri ambiti, lo studente è in grado di operare con i numeri interi e i numeri razionali, utilizzando consapevolmente le proprietà delle operazioni, e scegliendo, a seconda dei casi, rappresentazioni dei numeri comode per il calcolo o per l'intuizione; usa il linguaggio algebrico per modellizzare situazioni, porre problemi ed esplorarli, cercando esempi e controesempi, congetturando e argomentando; riconosce quando sia opportuno ricorrere a semplici equazioni o sistemi di primo e secondo grado per formalizzare e risolvere problemi; esegue calcoli numerici e letterali, sostenuto dalla comprensione del significato dei simboli e delle procedure, con abilità adeguata al livello scolastico, che non richiede tecnicismi eccessivi.

In particolare, lo studente è in grado di:

- eseguire le operazioni fornendo risultati esatti oppure approssimati in modo opportuno;
- tradurre in formule istruzioni di calcolo espresse a parole, e viceversa;
- eseguire, anche a mente, semplici espressioni di calcolo con numeri, essendo consapevole delle proprietà e delle strategie usate; descrivere in termini generali tali proprietà mediante espressioni letterali;
- ricorrere in modo appropriato a diversi strumenti di calcolo, quando opportuno;
- stimare l'errore che si può avere nel risultato di un'operazione come conseguenza dell'incertezza o dell'approssimazione che si ha sui dati di partenza.

Inoltre, basandosi sulla molteplicità di esempi di espressioni letterali incontrati in situazioni e problemi relativi a tutti i nuclei, e opportunamente orientato dal docente a riflettere, generalizzare e dimostrare, lo studente è in grado di:

- riconoscere e usare consapevolmente le proprietà delle operazioni;
- riconoscere, applicare e giustificare le proprietà delle potenze intere di un numero;
- manipolare e trasformare espressioni letterali, come il quadrato di una somma di termini, la differenza di due quadrati e la somma di semplici frazioni algebriche, in funzione degli obiettivi che si hanno, comprendendo il significato che tali espressioni e trasformazioni assumono in diversi contesti e situazioni;
- determinare l'insieme delle soluzioni di un'equazione di primo grado in una incognita x , riconducendola alla forma $ax=b$ e affrontando consapevolmente il caso $a=0$;
- determinare le soluzioni di semplici equazioni di secondo grado, utilizzando la formula risolutiva, di cui sa giustificare la validità, o altri procedimenti, quando più convenienti;
- fornire diversi esempi di numeri primi, e dimostrare che i numeri primi sono infiniti;
- spiegare il significato della scrittura posizionale dei numeri decimali ed esprimerli come somma di potenze di dieci moltiplicate per le cifre corrispondenti;
- cogliere il significato delle procedure tradizionali di calcolo con carta e penna, basate sulla notazione posizionale, giustificarle e descriverle in situazioni semplici, anche scrivendo qualche numero in notazione binaria;
- illustrare i vantaggi computazionali e concettuali del sistema di numerazione posizionale rispetto ad altri, indicando come il primo abbia progressivamente sostituito il sistema romano e l'influenza che ciò ha avuto sullo sviluppo della scienza e della società;
- riconoscere che esistono numeri positivi a che non possono essere espressi come quadrato di un numero razionale; usare il simbolo $\sqrt{a}$ come un numero e razionalizzare espressioni del tipo $(b+\sqrt{a})^{-1}$;
- comprendere che i numeri utilizzati nei calcoli e nelle misure appartengono a un insieme, detto dei numeri reali, il quale è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei punti della retta e contiene in particolare i numeri razionali, il numero π greco, le radici dei numeri razionali non negativi; riconoscere che tale insieme è chiuso rispetto alle operazioni di somma, prodotto, differenza, divisione per numeri diversi da 0 ed estrazione di radice di numeri non negativi.

FUNZIONI

Attraverso la pluralità di problemi che gli vengono presentati, lo studente sviluppa progressivamente il linguaggio degli insiemi e il concetto di funzione, riconoscendo la sua utilità per descrivere gli oggetti matematici e le relazioni tra essi. In particolare,

- riconosce che in diverse situazioni la risposta a un problema è una funzione dei dati e che può essere utile rappresentarla con espressioni letterali, grafici, tabelle, descrizioni a parole, a seconda degli scopi che si hanno;
- rappresenta il grafico delle funzioni
 $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$

a partire dal grafico della funzione $y=x$, attraverso ragionamenti qualitativi e individuando alcuni punti dei grafici che si calcolano facilmente;

- descrive i grafici delle funzioni del tipo $af(x)$, $f(ax)$, $f(x-b)$, $f(x)+c$ e analizza come varia il loro comportamento al variare dei parametri a , b , c ; a partire dal grafico di una funzione f , dove f è una delle funzioni sopra elencate;
- rappresenta e descrive il comportamento di semplici funzioni g ottenute come somma, prodotto o composizione di funzioni dei tipi sopra indicati; in particolare, determina l'insieme di definizione, il segno e gli zeri della funzione g , affrontando così lo studio di equazioni del tipo $g(x)=0$ e disequazioni del tipo $g(x)>0$;
- descrive esempi di contesti e situazioni nei quali funzioni del tipo indicato, anche definite a tratti, vengono usate come modelli di fenomeni naturali o di dispositivi artificiali;
- individua strategie per verificare la correttezza dei grafici rappresentati e per studiare casi complessi o che presentano dubbi, anche utilizzando strumenti software;
- riconosce problemi in cui occorre determinare i valori di una o più variabili che soddisfano simultaneamente diverse equazioni o disequazioni e descrive le soluzioni di tali problemi come intersezione e unione di opportuni insiemi, utilizzando correttamente i connettivi logici "e", "o";
- riconosce la funzione $x=\sqrt{y}$, definita per $y \geq 0$, come funzione inversa della funzione che associa a ogni numero reale non negativo x il numero $y=x^2$; estende tale concetto alla potenza n -esima;

- descrive in modo adeguato, dato un numero $b \geq 0$, un algoritmo di tipo bisezione, che consente di determinare una sequenza di numeri x_j che approssima la radice quadrata di b con un errore minore di una quantità prefissata;
- esplora le proprietà della funzione esponenziale $f(k)=a^k$, con k intero non negativo, e la utilizza come modello per descrivere l'evoluzione di fenomeni naturali; in contesti significativi ne estende il dominio ai numeri negativi;
- estende, per periodicità, le funzioni goniometriche $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, motivato dalla necessità di descrivere fenomeni e dispositivi oscillanti, e ne rappresenta qualitativamente i loro grafici.

GEOMETRIA

Nel contesto di situazioni e problemi significativi, lo studente consolida gradualmente nel corso del biennio le abilità di riconoscere, descrivere e riprodurre figure geometriche nel piano, anche usando le coordinate, nonché di riconoscere e rappresentare gli effetti di simmetrie, rotazioni, traslazioni e similitudini; consolida inoltre le abilità di visualizzare e rappresentare, mediante disegni o modelli, semplici figure nello spazio. Tutto questo si intreccia con la progressiva comprensione della geometria euclidea come sistema teorico. In particolare, lo studente

- riconosce ed enuncia le principali proprietà degli enti geometrici, organizzandole in una rete di connessioni e catene deduttive, in questo modo comprende il significato dei termini assioma, definizione, teorema, dimostrazione, ed è in grado di usarli correttamente;
- riconosce la struttura assiomatica della geometria euclidea e comprende, anche attraverso la discussione del V postulato, il ruolo degli assiomi come scelte fondative da cui si sviluppa un sistema di teoremi;
- dimostra, nell'ambito di tale sistema, alcuni risultati classici, come il Teorema di Pitagora e il suo inverso, le proprietà dei parallelogrammi, la relazione tra angoli al centro e angoli alla circonferenza, i teoremi di Euclide, i criteri di similitudine per i triangoli.

Inoltre, lo studente utilizza le coordinate cartesiane e il linguaggio algebrico per descrivere una figura tramite un sistema di equazioni e disequazioni, e, viceversa, interpreta e rappresenta geometricamente l'insieme delle soluzioni di un sistema dato. In questo modo comprende che alcuni problemi si possono affrontare sia geometricamente sia algebricamente e riconosce vantaggi e svantaggi dei diversi approcci.

Inoltre, lo studente:

- determina il perimetro e l'area di figure piane, anche rappresentate in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, nonché l'area di superfici e il volume di solidi nello spazio, scomponendo o ricomponendo le figure;
- descrive e spiega il diverso comportamento di lunghezza, area e volume rispetto a un cambiamento di scala;
- misura gli angoli in gradi e in radianti;
- riconosce e interpreta i rapporti tra i lati di un triangolo rettangolo come funzioni goniometriche; utilizza tali funzioni e le loro inverse per determinare le misure mancanti di lati o angoli in triangoli rettangoli.

Infine, nel corso del biennio, lo studente apprende l'uso dei vettori, sia come segmenti orientati, sia come liste ordinate di numeri, al fine di descrivere enti geometrici ed enunciare semplici proprietà. In particolare, lo studente:

- determina, sia algebricamente, sia mediante una costruzione geometrica, la somma e la combinazione lineare di due vettori con coefficienti assegnati;
- individua le componenti di un vettore lungo due direzioni date, sia graficamente che algebricamente.

ANALISI DI DATI, STATISTICA, PROBABILITA'

Nel contesto di situazioni e problemi significativi, sia interni alla matematica sia collegati ad altre discipline, lo studente raccoglie, rappresenta e archivia dati in diversi formati, eventualmente anche usando metodi e strumenti dell'informatica, e distinguendo differenti tipi di caratteri e scale. Tra gli altri, considera dati relativi a esperimenti aleatori ideali, come l'estrazione da urne e il lancio di monete o dadi, e comincia a riconoscere le relazioni tra situazioni reali e modelli ideali.

In casi semplici:

- determina diverse misure di tendenza centrale e indici di posizione di una distribuzione di dati: media, mediana, percentile;
- calcola la varianza e la deviazione standard;
- conosce il significato di tali misure e indici e li utilizza per descrivere, interpretare e paragonare tra loro le distribuzioni.

Nel contesto di semplici esempi di esperimenti aleatori che hanno un insieme finito di esiti possibili, costruisce il concetto di evento e di probabilità di un evento. In particolare,

- confronta eventi diversi e decide se è ragionevole ritenere due eventi ugualmente probabili, oppure se uno dei due è più probabile dell'altro;
- attribuisce un valore numerico alla probabilità di un evento quando gli eventi elementari si ritengono ugualmente probabili, oppure sulla base di dati statistici; sa spiegare perché prende tali decisioni;
- sviluppa un linguaggio, anche simbolico, per descrivere l'insieme degli eventi, pensandoli come sottoinsiemi di un opportuno spazio;
- riconosce che la probabilità si può pensare come una funzione che associa a ogni evento un numero fra zero e uno e ha la proprietà di essere additiva sugli eventi disgiunti;
- calcola, in diverse situazioni, la probabilità di eventi conoscendo la probabilità di altri eventi.

INFORMATICA

A partire da semplici esempi di algoritmi, anche incontrati nell'ambito degli altri nuclei, implementati con un opportuno linguaggio di programmazione, lo studente rafforza la sua abilità di

- analizzare un algoritmo o un programma per capirne il comportamento, identificarne eventuali difetti e correggerli;
- scrivere semplici programmi con strutture di controllo e condizioni, anche utilizzando variabili;
- valutare l'esito di un algoritmo o di un programma seguendone i passi e tenendo traccia del valore delle variabili.

Su questa base sviluppa e approfondisce

- i concetti di esecuzione automatica di algoritmi, correttezza ed efficienza di algoritmi e programmi, rappresentazione dello stato di un programma informatico in esecuzione;
- l'analisi delle relazioni tra le modalità di rappresentazione dei dati e l'efficacia della loro elaborazione attraverso algoritmi e programmi informatici.

Inoltre, comprende l'importanza del punto di vista dell'utente (bisogni, competenze, contesto d'uso) nella definizione e nella realizzazione di soluzioni informatiche e acquisisce consapevolezza del legame tra le modalità con cui i problemi vengono risolti attraverso strumenti informatici e le conseguenze che tali soluzioni producono sul piano sociale, culturale ed etico anche nel caso di sistemi basati su tecniche dell'intelligenza artificiale.

LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI E DELLE FUNZIONI, LOGICA E LINGUAGGIO VERBALE

Stimolato da specifiche questioni che ha incontrato, lo studente

- riflette sulla forma e sulla struttura di enunciati e ragionamenti, riconoscendo le specificità dell'uso matematico di parole come "e", "o", "non", "se... allora";
- individua ipotesi e tesi negli enunciati formulati come implicazioni e riconosce le dimostrazioni per assurdo;
- acquisisce consapevolezza e precisione nell'uso del linguaggio ordinario.

Inoltre, si appropria progressivamente del linguaggio elementare degli insiemi e del concetto generale di funzione e li usa per descrivere problemi e situazioni, ogni volta che è opportuno; in particolare è in grado di:

- usare le operazioni e le relazioni tra insiemi, delle quali riconosce e sa descrivere le più semplici proprietà;
- descrivere tipici modi e algoritmi per elencare e contare gli elementi di insiemi finiti costruiti secondo certe regole, usando anche i concetti di funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva; ad esempio: l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme; il prodotto cartesiano; l'insieme delle permutazioni; l'insieme dei sottoinsiemi che hanno k elementi di un insieme con n elementi.

SECONDO BIENNIO

Nel secondo biennio lo studente utilizza, in situazioni via via più complesse e diversificate, quanto appreso nel primo biennio e sviluppa nuove conoscenze, competenze e punti di vista. In ogni caso, l'attenzione è rivolta allo sviluppo dell'intuizione, alla precisione del linguaggio e alla correttezza del ragionamento in situazioni semplici e significative, più che all'acquisizione di tecniche di calcolo in situazioni complicate. Gli obiettivi sono organizzati nei seguenti nuclei tematici: Funzioni e modelli; Geometria e Algebra; Elementi di Calcolo differenziale e integrale; Analisi di dati, Statistica e Probabilità. Come per gli altri periodi del percorso liceale, gli obiettivi sono intesi come traguardi da conseguire al termine del biennio. L'ordine con cui essi sono qui presentati non intende in alcun modo prefigurare la scansione didattica della loro proposta nelle classi. Assumono, infatti, crescente rilievo le interconnessioni tra i nuclei: concetti, strumenti e linguaggi sviluppati

nei diversi ambiti si collegano tra loro e contribuiscono alla costruzione di un quadro unitario e coerente. Tali legami possono essere opportunamente evidenziati e valorizzati nei percorsi didattici, nei quali ogni nucleo può essere gradualmente sviluppato fin dall'inizio del biennio. Ciò vale in particolare per Analisi di dati, Statistica e Probabilità e per Elementi di Calcolo differenziale e integrale, i cui problemi, concetti e metodi hanno bisogno di tempo per maturare e il cui studio può efficacemente essere avviato insieme a Funzioni e modelli e Geometria e Algebra, anche per favorire gli opportuni raccordi con l'insegnamento della fisica. Resta all'autonomia e alla responsabilità delle istituzioni scolastiche e dei docenti definire i percorsi formativi, nonché i tempi dell'insegnamento e dello svolgimento delle singole discipline e attività, nel modo più adeguato al tipo di studi e ai ritmi di apprendimento degli studenti.

FUNZIONI E MODELLI

Lo studente riprende in considerazione e studia sistematicamente alcune famiglie di funzioni elementari che ha cominciato a esplorare nel primo biennio, e le usa per modellizzare fenomeni e problemi. Ne approfondisce le proprietà, l'origine storica ove opportuno, e le usa per rappresentare e interpretare fenomeni naturali o sistemi artificiali. In particolare, lo studente è in grado di rappresentare il grafico e descrivere il comportamento delle funzioni del tipo:

$$y = ax + b, \quad y = m(x-p)^2 + q, \quad y = cx^k, \quad y = ca^x, \quad y = a \sin(kx + \varphi),$$

nonché di determinare i parametri in modo che siano soddisfatte le condizioni date e interpretare il loro significato in diversi contesti, ad esempio: moti uniformi e accelerati, crescita e decadimento, fenomeni ondulatori.

Inoltre, lo studente è in grado di:

- rappresentare il grafico e ricavare il comportamento e le proprietà della funzione logaritmo a partire da quelle della funzione esponenziale; discutere le ragioni dell'importanza storica del logaritmo; portare esempi di scale logaritmiche di uso comune e discutere le ragioni della loro utilità;
- riconoscere le formule di somma per il seno e il coseno, comprendendone il significato geometrico e fisico e le possibili applicazioni;
- parametrizzare semplici curve, ad esempio un segmento, una circonferenza, una parabola, una spirale;
- dimostrare, in semplici situazioni, che una funzione è monotona in un dato intervallo, oppure non lo è; determinare con opportuni ragionamenti il valore massimo e minimo, quando esistono, insieme ai punti in cui vengono assunti;
- rappresentare qualitativamente il grafico di qualche funzione significativa dei tipi indicati in precedenza, che incontra in problemi di interesse, eventualmente risolvendo in tale contesto semplici equazioni o disequazioni, di cui interpreta il significato.

Infine, lo studente è in grado di discutere qualche esempio di come, tramite un modello di regressione o di classificazione, basato su funzioni lineari e su semplici reti neurali, si può descrivere un fenomeno o affrontare un problema di riconoscimento. In particolare, nel contesto degli esempi considerati, lo studente comprende il problema di individuare opportuni parametri che rendano un modello adeguato agli scopi prefissati ed è in grado di descrivere alcune idee intuitive per la loro ricerca, idee che sono alla base dei primi algoritmi di apprendimento automatico nell'ambito dell'intelligenza artificiale. Negli esempi, lo studente è inoltre in grado di riconoscere i principi su cui i modelli si fondano e il tipo di conoscenza che essi consentono di ottenere sul mondo.

GEOMETRIA E ALGEBRA

Nel secondo biennio, a partire dall'intuizione e dalle proprietà degli enti geometrici euclidei, lo studente sviluppa il linguaggio dei vettori e delle coordinate cartesiane, e le relazioni tra descrizioni geometriche e algebriche di figure e trasformazioni. Anche grazie al linguaggio delle funzioni lineari, tali strumenti vengono estesi allo spazio tridimensionale e applicati allo studio di rette, piani e coniche, rafforzando la capacità di passare tra diversi linguaggi nella risoluzione di problemi e nella modellizzazione. In particolare, lo studente è in grado di

- rappresentare geometricamente e analiticamente la combinazione lineare di due vettori con coefficienti assegnati, nonché la retta generata da un vettore non nullo e il piano generato da due vettori non allineati;
- descrivere una retta o un piano come insieme delle soluzioni di un'equazione o di un sistema lineare;
- interpretare le soluzioni di un sistema lineare come decomposizioni di un vettore rispetto a un insieme di vettori assegnati;

- discutere la risolubilità di un sistema lineare e determinarne le soluzioni, ad esempio con il metodo di eliminazione di Gauss, riconoscendo vantaggi e limitazioni di diversi approcci; riconoscere che sistemi di questo tipo si trovano nello studio della regressione e delle reti neurali;
- descrivere algebricamente qualche semplice trasformazione geometrica e comprenderne il comportamento lineare;
- esprimere il prodotto scalare usando le coordinate, e verificare condizioni di ortogonalità fra vettori, rette e piani.

Lo studente è in grado di

- ricavare i vertici e le proprietà di simmetria delle coniche, assegnate tramite un'opportuna equazione;
- scrivere l'equazione di una conica traslata rispetto alla posizione canonica;
- descrivere tratti di coniche come grafici di una funzione della variabile x o della variabile y , a seconda delle necessità e delle possibilità, in contesti e situazioni di interesse;
- descrivere le proprietà geometriche che caratterizzano i diversi tipi di conica;
- illustrare la caratterizzazione delle coniche come sezioni di un cono, nonché la loro importanza nello sviluppo storico del pensiero scientifico e nella tecnica;
- collocare la nascita della geometria analitica di Cartesio nel contesto filosofico, e illustrare la sua influenza sul successivo sviluppo del Calcolo infinitesimale.

Lo studente è in grado di operare nell'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi e trovare il reciproco dei numeri diversi da zero; rappresentare i numeri complessi come punti del piano; scriverli in forma trigonometrica; interpretare geometricamente le operazioni; trovare le soluzioni di una qualsiasi equazione di secondo grado, essendo consapevole dell'origine storica dei "numeri immaginari" in connessione con il problema di determinare le soluzioni delle equazioni algebriche di grado superiore al secondo.

ELEMENTI DI CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE

Al termine del secondo biennio lo studente è in grado di:

- fornire diversi esempi di successioni e serie, in particolare la serie geometrica, indicando le situazioni di interesse in cui le ha incontrate;
- esplorare il comportamento di successioni definite in diversi modi, anche utilizzando il concetto di limite;
- confrontare l'ordine di infinito di diverse successioni, in particolare di $\log n$, n , 2^n , $n!$.

Lo studente comprende come i problemi di determinare l'area delle figure e le tangenti alle curve motivano lo studio dei processi di approssimazione e conducono ai concetti di integrale, derivata e limite.

In particolare, lo studente

- precisa l'idea intuitiva di area di una figura e di lunghezza di una curva ed è in grado di stimare per eccesso e per difetto l'area o il perimetro del cerchio e del segmento parabolico;
- conosce una definizione di integrale di una funzione, basata sulla nozione di area del sottografico e sull'approssimazione con funzioni costanti a tratti; usa le proprietà di linearità, monotonia e additività dell'integrale e lo calcola in semplici casi; interpreta il significato dell'integrale in diversi contesti.

Lo studente è in grado di

- illustrare il concetto di rapporto incrementale di una funzione in un intervallo e spiegarne l'interpretazione sia come pendenza di un'opportuna retta secante al grafico, sia come velocità media;
- illustrare un'idea intuitiva della derivata di una funzione in un punto come valore limite del rapporto incrementale, interpretando la derivata come velocità istantanea o come pendenza del grafico;
- illustrare la definizione del concetto di limite e le sue proprietà, in particolare la linearità e la monotonia, comprendendone il significato e sapendole giustificare in modo coerente, anche facendo ricorso all'intuizione quando opportuno;
- scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto;
- descrivere e disegnare il grafico della derivata di una funzione, in semplici casi, anche per funzioni definite a tratti;
- giustificare una formula per la derivata di semplici funzioni algebriche, della funzione esponenziale, della funzione logaritmo e delle funzioni seno e coseno;
- giustificare una formula per la derivata della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni derivabili;
- giustificare che, se una funzione è derivabile in un intervallo e ha un punto di massimo o di minimo interno all'intervallo stesso, allora in quel punto la derivata è nulla; applicare questa proprietà per risolvere problemi in diversi contesti.

ANALISI DI DATI, STATISTICA E PROBABILITA'

In esempi semplici e significativi, anche presi da un opportuno insieme di dati reali, ed eventualmente usando metodi e strumenti dell'informatica, lo studente è in grado di:

- rappresentare dati in forme che ne consentano l'elaborazione e l'analisi, anche con l'uso di strumenti informatici, inclusi quelli basati su intelligenza artificiale;
- costruire e leggere una tabella a doppia entrata di frequenze, con le frequenze di riga e di colonna, relativa a due variabili categoriche; usare la tabella per osservare andamenti regolari e anomalie, nonché per valutare dipendenza e indipendenza tra le variabili tramite strumenti qualitativi e quantitativi;
- costruire e leggere il grafico di dispersione di un insieme di dati relativo a due variabili numeriche e comprendere il significato della correlazione lineare in quanto indice del modo in cui due variabili tendono a crescere o decrescere insieme, riconoscendo limiti, possibili abusi interpretativi e casi in cui la correlazione non implica causalità; collegare la correlazione lineare alla retta di regressione;
- riconoscere come i metodi per trattare due variabili si estendono al caso di molte variabili.

Infine, al termine del secondo biennio, lo studente è in grado di accedere a un set di dati reali e utilizzarlo in modo appropriato, avvalendosi, quando opportuno, di metodi e strumenti dell'informatica.

QUINTO ANNO

Lo studente sviluppa una prima comprensione delle idee dell'Analisi matematica e del loro legame con la nascita della scienza moderna. È inoltre in grado di approfondire, anche con la guida del docente e in relazione alle proprie intenzioni di studio e di lavoro, temi di proprio interesse, e di comprendere e discutere alcuni esempi delle relazioni storicamente intrecciate tra matematica, arte e pensiero filosofico. In questo modo, matura una visione complessiva di ciò che ha appreso, che diventa strumento per orientarsi consapevolmente verso gli studi e il lavoro futuro.

ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E MODELLI DIFFERENZIALI

Lo studente consolida e sviluppa ulteriormente i concetti fondamentali dell'analisi e le loro interconnessioni, e li usa per studiare il comportamento di semplici funzioni e modellizzare fenomeni in diversi contesti. In particolare, è in grado di

- giustificare una formula per la derivata della composizione di due funzioni derivabili, e della funzione inversa, quando esistono;
- discutere le informazioni che la derivata prima e seconda permettono di ottenere sull'andamento della funzione di partenza e usarle per studiare il comportamento e tracciare il grafico di funzioni in situazioni di interesse, avendo obiettivi determinati e adottando conseguenti strategie;
- enunciare le principali proprietà delle funzioni continue e delle funzioni derivabili; illustrarne il significato, organizzandole in una costruzione teorica di connessioni e catene deduttive, senza necessariamente dimostrare tutte le affermazioni, ma avendo compreso la necessità delle ipotesi nei teoremi;
- ricostruire il grafico qualitativo di una funzione a partire dal grafico della derivata prima.

Inoltre, lo studente è in grado di

- enunciare il Teorema fondamentale del Calcolo e utilizzarlo per calcolare l'integrale di alcune funzioni di interesse, trovando una primitiva con semplici strategie;
- illustrare il significato del Teorema fondamentale in situazioni e contesti di altre discipline.

Lo studente conosce esempi di equazioni differenziali e ne interpreta il significato in diversi contesti (ad esempio il decadimento radioattivo, la crescita di una popolazione, il moto armonico, la vibrazione di una corda), anche essendo consapevole del ruolo delle condizioni iniziali o al contorno per avere l'esistenza e l'unicità di una soluzione. Inoltre, esplora equazioni differenziali cercandone le soluzioni anche per tentativi o in opportune famiglie di funzioni dipendenti da parametri.

Lo studente è infine in grado di illustrare l'origine storica delle equazioni differenziali in connessione con la formulazione delle leggi della meccanica e della gravitazione universale da parte di Isaac Newton, nonché di discutere come questo nuovo modo di descrivere la Natura ha influito sulla nascita della scienza moderna e sul pensiero filosofico.

MODELLI STATISTICI

In esempi semplici e significativi, anche presi da un opportuno insieme di dati reali, lo studente è in grado di determinare le distribuzioni relative agli esiti di semplici esperimenti aleatori ideali, in particolare le distribuzioni uniforme discreta e binomiale; inoltre comprende cosa si intende per distribuzione continua ed è in grado di usare la distribuzione normale per calcolare probabilità di semplici eventi.

Lo studente riconosce in semplici situazioni il problema di modellizzare e simulare un fenomeno aleatorio tramite un modello statistico, e comprende, a un livello elementare, come tale prospettiva possa svilupparsi nella direzione dei sistemi di intelligenza artificiale generativa.

Lo studente riconosce il ruolo delle assunzioni a priori nella descrizione di situazioni reali, sviluppando un atteggiamento critico e consapevole verso l'uso dei dati. In questo contesto comprende il ruolo della formula di Bayes e la utilizza in esempi concreti legati alla vita quotidiana (test diagnostici, classificazioni, aggiornamento di probabilità), evitando eccessivi tecnicismi.

APPROFONDIMENTI

Lo studente, con la guida dell'insegnante e valorizzando interessi e approfondimenti personali, svolge un percorso di studio, eventualmente nell'ambito di progetti che coinvolgono università, enti di ricerca, musei, istituzioni culturali e il mondo del lavoro, nell'ambito del quale esercita e sviluppa la capacità di

- discutere il ruolo della matematica in qualche ambito del sapere, con eventuali riferimenti allo sviluppo storico del pensiero e della società;
- presentare una questione di matematica che approfondisce un argomento studiato o ne introduce di nuovi.

Inoltre, riflette sulla propria capacità di affrontare problemi e studi ulteriori con gli strumenti matematici e informatici acquisiti, anche in relazione a un eventuale percorso universitario di interesse.

Ad esempio, ferma restando l'autonomia dei docenti e degli studenti nelle scelte, tra i possibili temi di approfondimento e collegamento interdisciplinare si indicano: qualche teoria assiomatica – come le Geometrie non euclidee o i numeri naturali di Peano; gli insiemi infiniti, numerabili e non numerabili; i grafi e le reti; i sistemi dinamici; i codici e la crittografia; i sistemi di intelligenza artificiale e apprendimento automatico.

Gli approfondimenti sono altresì un'occasione di riflessione retrospettiva sugli studi compiuti, al fine di apprezzare la loro unità culturale e di comprenderne meglio il senso complessivo nell'orizzonte degli obiettivi generali del Liceo Scientifico. In conclusione, lo studente avrà dunque gli elementi di conoscenza e le competenze per discutere il ruolo della matematica nella scienza, nella tecnica e negli altri ambiti dell'attività umana con riferimento alla sua evoluzione storica e agli sviluppi più attuali.